АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Том 9

Выпуск 4

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1964

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Том 9 | 1964 | Вып. 4

УДК 548.0:53

И. С. ЖЕЛУДЕВ

АКСИАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ ТРЕТЬЕГО РАНГА И ОПИСЫВАЕМЫЕ ИМИ ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Приводятся матрицы коэффициентов аксиальных тензоров третьего ранга для всех классов кристаллов и текстур, имеющих оси симметрии бесконечного порядка. Предусматривается возможность ряда явлений, описываемых полярными и аксиальными тензорами третьего ранга (поляризация при деформации кручения, возникновение оптической активности при приложении к кристаллам электрических полей и др).

1. Аксиальные тензоры третьего ранга

Под аксиальными тензорами третьего ранга $[A_{ikl}]$, как и обычно, здесь будут пониматься тензоры, новые компоненты которых A_{ikl}' (после преобразования системы координат) выражаются через старые A_{mno} по закону

$$A_{ikl}' = \pm C_{im} C_{kn} C_{lo} A_{mno}, \tag{1}$$

где C_{im}, C_{kn}, C_{lo} — косинусы углов между старыми и новыми осями систем координат. При этом знак плюс (+) в (1) берется в том случае, когда переход от одной системы координат к другой осуществляется при помощи только простых поворотов (без изменения знака системы координат; при простых поворотах правая система остается правой, левая — левой). Знак минус (—) в (1) берется в том случае, когда переход от одной системы координат к другой осуществляется при помощи зеркальных поворотов. При зеркальных поворотах (включающих и инверсию системы координат в точке, являющейся ее началом) система координат изменяет свой знак: правая становится левой и наоборот. Тензоры третьего ранга описывают связь между тензорами второго ранга и векторами. В общем случае тензоры второго ранга и векторы могут быть как полярными, так и аксиальными. Закон преобразования компонент аксиальных тензоров второго ранга и аксиальных векторов аналогичен (1), в то время как для поляриых тензоров второго ранга и полярных векторов в формулах типа (1) берется знак (+) как в случае преобразований систем координат, не связанных с изменением знака, так и в случае преобразований, связанных с изменением их знака [1].

Вообще, мыслимы следующие сочетания тензоров второго ранга с векторами: 1) полярный тензор — полярный вектор; 2) полярный тензор — аксиальный вектор; 3) аксиальный тензор — полярный вектор; 4) аксиальный тензор — аксиальный вектор. Из указанных выше правил преобразования компонент тензоров третьего и второго рангов, а также векторов видно, что первое и четвертое из только что приведенных сочетаний будут описываться полярным тензором третьего ранга, а второе и третье — аксиальным. В последних двух случаях в силу того, что при изменении знака системы координат в формулах преобразования компонент меняет знак только одна из величин, компоненты тензора третьего ранга будет подчиняться закону (1), т. е. тензор будет аксиальным.

Тензорная форма связи между компонентами P_i некоторого вектора **P** и компонентами некоторого тензора T_{kl}, даваемая аксиальным тензором третьего ранга (как и полярным), имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccc} & T_{11} & T_{22} & T_{33} & T_{23} & T_{32} & T_{31} & T_{13} & T_{12} & T_{21} \\ P_1 & A_{111} & A_{122} & A_{133} & A_{123} & A_{132} & A_{131} & A_{113} & A_{112} & A_{121} \\ P_2 & A_{211} & A_{222} & A_{233} & A_{223} & A_{232} & A_{231} & A_{213} & A_{212} & A_{221} \\ P_3 & A_{311} & A_{322} & A_{333} & A_{323} & A_{332} & A_{331} & A_{313} & A_{312} & A_{321}. \end{array} \qquad (2)$$

В общем случае тензор (2) имеет $3^3 = 27$ независимых компонентов. В тех случаях, когда тензор T_{ij} является симметричным, тензор (2) может быть записан в более компактной матричной форме

$$\begin{array}{ccccccc} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \\ P_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ P_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ P_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36}, \end{array} \qquad (3)$$

в которой положено: $T_1 = T_{11}$; $T_2 = T_{22}$; $T_3 = T_{33}$; $T_4 = T_{23}, T_{32}$; $T_5 = T_{31}, T_{13}$, $T_6 = T_{12}$, T_{21}. Сравнение (2) и (3) позволяет установить следующее соотношение между компонентами

$$A_{i1} = A_{i11};\ A_{i2} = A_{i22};\ A_{i3} = A_{i33};$$

$$A_{i4} = 2A_{i23} = 2A_{i32};\ A_{i5} = 2A_{i31} = 2A_{i13};$$

$$A_{i6} = 2A_{i12} = 2A_{i21}\ (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, в случае симметричности тензора T_{ij} (наиболее часто встречающийся случай) максимальное число независимых компонент A_{ij} в (3) равно 18.

Симметрия среды, применительно к которой рассматривается то или иное физическое явление, накладывает ограничение на число независимых компонент в (3) и позволяет установить в некоторых случаях опре-

Матрицы коэффициентов аксиальных тензоров третьего ранга, соответствующие классам симметрии кристаллов и текстур

Классы симметрии кристаллов и текстур	Аксиальный тензор третьего ранга	Число независимых коэффициентов	Симметрия тензора	Классы симметрии кристаллов и текстур	Аксиальный тензор третьего ранга	Число независимых коэффициентов	Симметрия тензора
1, $\bar{1}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \end{matrix}$	18	$\bar{1}$	$\bar{4}$, 4, 4/m, $\bar{6}$, 6, 6/m, ∞	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & A_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{15} & -A_{14} & 0 \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	4	∞
2 m 2/m	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & A_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} & A_{25} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \end{matrix}$	8	2/m	3, $\bar{3}$	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{11} & 0 & A_{14} & A_{15} & -2A_{22} \\ -A_{22} & A_{22} & 0 & A_{15} & -A_{14} & -2A_{11} \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	6	$\bar{3}$
222 mm 2 mmm	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{36} \end{matrix}$	3	mmm	3m, 32 и $\bar{3}$m	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{11} & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{14} & -2A_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	2	$\bar{3}$/m
$\bar{4}$2m, 4mm, 422, 4/mmm, 6m2, 6mm, 622, 6/mmm, ∞m, ∞/m ∞2, ∞/mm	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	1	∞/mm	23 m3	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14} \end{matrix}$	1	m3

деленную связь между величинами и знаками различных компонент. Здесь будут рассматриваться только ограничения и связи, соответствующие симметрии кристаллов и сред (текстур), симметрия которых описывается предельными группами симметрии П. Кюри: $\infty / \infty m$ (симметрия шара); $\infty / \infty 2$ (симметрия шара, лишенного плоскостной симметрии); ∞ / mm (симметрия цилиндра); $\infty 2$ (симметрия скрученного цилиндра); ∞ / m (симметрия вращающегося цилиндра; симметрия магнитного поля); ∞m (симметрия конуса; симметрия электрического поля); ∞ (симметрия вращающегося конуса). Результаты указанного рассмотрения суммированы в таблице.

Из таблицы видно, что из 32 классов кристаллов для 29 аксиальный тензор третьего ранга имеет хотя бы один отличный от нуля коэффициент. Это же относится и к пяти группам симметрии текстур с бесконечными осями. Всего для кристаллов и текстур существует восемь различающихся по виду аксиальных тензоров третьего ранга. Для трех кубических классов кристаллов $m3m$, $\bar{4}3m$ и 432, а также для текстур с симметрией $\infty / \infty m$ и $\infty / \infty 2$ аксиальный тензор третьего ранга есть нуль-тензор.

2. Явления, описываемые аксиальными тензорами третьего ранга

Прежде чем рассматривать аксиальные тензоры третьего ранга, заметим, что типичным примером полярного тензора третьего ранга является пьезоэлектрический тензор, например тензор пьезоэлектрических модулей d_{kij}, связывающий полярный тензор механических напряжений t_{ij} с полярным вектором — электрической поляризацией P_k

$$P_k = d_{kij} t_{ij}. \qquad (4)$$

Можно предсказать также и новые эффекты, описываемые полярным тензором третьего ранга. Первый из них — эффект изменения (или появления) оптической активности кристаллов под действием магнитного поля. Необходимо подчеркнуть, что здесь речь идет не об обычном магнитном вращении плоскости поляризации света (эффект Фарадея), а об оптической активности, наведенной магнитным полем. Симметрия обоих указанных эффектов различна: магнитное вращение плоскости поляризации имеет симметрию ∞ / m (симметрия магнитного поля), а оптическая активность — $\infty 2$ (симметрию скрученного цилиндра).

Второй возможный новый эффект, описываемый тензором третьего ранга, должен состоять в изменении намагниченности кристаллов в результате деформации кручения. Должен существовать также и эффект, обратный указанному,— закручивание (скручивание) кристаллов под действием магнитного поля. Оба указанных здесь эффекта, как связывающие аксиальный тензор второго ранга с аксимальным вектором, должны описываться полярным тензором третьего ранга. Таким образом, указанные эффекты должны иметь место во всех пьезоэлектрических классах кристаллов. Тензоры этих эффектов будут совпадать по виду с пьезоэлектрическими тензорами соответствующих классов кристаллов.

Из эффектов, описываемых аксиальным тензором третьего ранга, прежде всего нужно указать на явление пьезомагнетизма [2, 3, 4]. Это случай связи полярного тензора второго ранга с аксиальным вектором. К настоящему времени явление пьезомагнетизма достаточно хорошо изучено на ряде антиферромагнетиков, и мы здесь на нем останавливаться не будем.

Определенный интерес может представлять и новое явление, описываемое аксиальным тензором третьего ранга — электрическая поляризация кристаллов под действием деформации кручения. Обозначая момент закручивания через M, а поляризацию кристалла — через P, можно записать уравнение электрической поляризации кристалла под действием кручения в виде:

$$P_i = K_{ijk} M_{jk}, \tag{5}$$

где K_{ijk} — коэффициенты крутильной поляризации, компоненты аксиального тензора третьего ранга. Проведенная Ивановой, по нашему предложению работа привела к экспериментальному обнаружению этого эффекта [5] в ряде кристаллов, в том числе в кристаллах виннокислого калия и сульфата лития (моногидрата). Электрической поляризацией под действием деформации кручения будут (в соответствии с таблицей) обладать все кристаллы, кроме кубических кристаллов классов $m3m$, $\bar{4}3m$ и 432. Особый интерес этот эффект имеет для кристаллов, обладающих центром симметрии и поэтому не являющихся пьезоэлектриками. Должен существовать и обратный эффект только что рассмотренному — закручивание (скручивание) кристалла при приложении к нему электрического поля.

Другим интересным эффектом, описываемым аксиальным тензором третьего ранга, должно быть изменение (или появление) оптической активности кристаллов под действием электрического поля. Ниже этот эффект будет называться эффектом электрооптической активности. Обозначая удельное вращение плоскости поляризации света под действием электрического поля **E** через ρ, получим связь между аксиальным тензором второго ранга ρ_{ij} и компонентами вектора E_k в виде

$$\rho_{ij} = l_{ijk} E_k, \tag{6}$$

где l_{ijk} — коэффициенты электрооптической активности, компоненты аксиального тензора третьего ранга.

Матрицы коэффициентов l_{ij} (при переходе к двузначным индексам) полностью совпадают с матрицами коэффициентов A_{ij}, приведенными в таблице. Однако для описания эффекта электрооптической активности матрицу таблицы необходимо записывать в виде

$$\begin{array}{cccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \rho_1 & l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ \rho_2 & l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ \rho_3 & l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ \rho_4 & l_{14} & l_{24} & l_{34} \\ \rho_5 & l_{15} & l_{25} & l_{35} \\ \rho_6 & l_{16} & l_{26} & l_{36}. \end{array} \tag{7}$$

Из таблицы видно, что электрооптической активностью могут обладать кристаллы всех классов, за исключением трех кубических: $m3m$, $\bar{4}3m$ и 432.

С экспериментальной точки зрения наибольший интерес представляют такие кристаллы, в которых электрооптическая активность не будет маскироваться обычным, линейным электрооптическим эффектом. Как известно [6], это последнее явление не имеет места в центросимметричных кристаллах. Это означает, что в таких классах кристаллов, как mmm, $\bar{3}/m$, $4/m$, $6/m$ и т. д., приложение электрического поля будет сопровождаться только эффектом электрооптической активности. Наиболее простыми в измерениях должны быть эффекты электрооптической активности в том случас, когда эта активность будет иметь место в направлении оптической оси одноосных кристаллов. С этой точки зрения наиболее просто электрооптическую активность обнаружить в кристаллах классов $4/m$, $6/m$, $\bar{6}$ и $\bar{4}$. Любопытно, что в последних двух классах линейный электрооптический эффект не будет мешать эффекту электрооптической активности, так как приложение электрического поля в направлении главной оси не приводит к линейному электрооптическому эффекту в указанном направлении ($r = 0$).

Литература

1. И. С. Желудев. Кристаллография, 2, 207, 1957.
2. W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig, 1910.
3. Л. Д. Ландау, Е. Г. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат М., 1957.
4. Б. А. Тавгер. Кристаллография, 3, 342, 1958.
5. Г. Е. Иванова. Дипломная работа. Физ. фак. МГУ, 1961.
6. И. С. Желудев, О. Г. Влох. Кристаллография, 3, 639, 1958.

Институт кристаллографии
АН СССР

Поступила в редакцию
21.II.1964